



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**  
**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A**  
**BIOMECHANIKY**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## **PARAMETRY LOMOVÉ MECHANIKY**

PARAMETERS OF FRACTURE MECHANICS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**TOMÁŠ OPLT**

**VEDOUcí PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. JANA HORNÍKOVÁ, Ph.D.**

BRNO 2013



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2012/2013

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Tomáš Opl

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Parametry lomové mechaniky**

v anglickém jazyce:

### **Parameters of Fracture Mechanics**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Popis parametrů používaných při řešení úloh víceparametrové lineární a elastoplastické lomové mechaniky.

Cíle bakalářské práce:

Posouzení vlivu jednotlivých parametrů na popis pole napětí v okolí čela trhlin při obecném zatížení.

Seznam odborné literatury:

Anderson Ph. D.: Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. CRC Press. Texas, 1995.  
Kunz J.: Základy lomové mechaniky. ČVUT, Praha, 1994.

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 6.11.2012

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Práce má rešeršní charakter a je zaměřena na popis nejvýznamnějších parametrů lomové mechaniky, potřebných k definování napětového pole v okolí čela trhliny. První a nejobsáhlejší část je rozdělena na dvě podčásti, kde jsou uvedené jednotlivé parametry jednoparametrové lomové mechaniky nejprve s uvažováním lineárně elastických deformací, poté i elasto-plastických deformací. Druhá, kratší část práce je zaměřena na víceparametrový popis pole napětí v okolí kořene trhliny, potřebný pro výpočet konstrukcí s nutností uvažování jejich geometrických tvarů.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

lomová mechanika, součinitel intenzity napětí, trhlina,  $J$  integrál, víceparametrová lomová mechanika

## **ABSTRACT**

This thesis is the descriptive summary for the most significant parameters of fracture mechanics, required to define stress field on the crack tip. The first and also the most extensive part is divided into two subparts. There are mentioned particular parameters of one-parameter fracture mechanics, firstly are considered linear elastic deformations, thereafter the elastoplastic deformations. The second, shorter part of the thesis, is aimed at multi-parameters stress field description on the crack tip, required for the calculation of constructions with the necessity to consider their geometry.

## **KEYWORDS**

fracture mechanics, stress intensity factor, crack,  $J$  integral, multi-parameter fracture mechanics

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

OPLT, Tomáš. *Parametry lomové mechaniky*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 34 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

## **PROHLÁŠENÍ AUTORA O PŮVODNOSTI PRÁCE**

Prohlašuji, že předložená bakalářská práce je mojí původní prací, kterou jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucí mé bakalářské práce a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne .....

.....  
Tomáš Oplt

## **PODĚKOVÁNÍ**

Tímto bych chtěl poděkovat především paní doc. Ing. Janě Horníkové, Ph.D. všestrannou pomoc, kterou mi poskytovala během psaní mé bakalářské práce a také panu prof. RNDr. Pavlu Šanderovi, CSc. za věcné připomínky a cenné rady.





## Obsah

1	Úvod .....	11
2	Součinitel intenzity napětí .....	13
2.1	Definice součinitele intenzity napětí .....	13
2.1.1	Princip superpozice .....	14
2.2	Tahový mód I .....	14
2.3	Rovinný smykový mód II .....	15
2.4	Antirovinný smykový mód III .....	16
3	Hnací síla trhliny .....	16
3.1	Energetická bilance, hnací síla trhliny .....	16
3.2	Vztah mezi součinitelem intenzity napětí a hnací silou trhliny .....	17
4	Hustota deformační energie .....	18
4.1	Definice koncepce a vztah se součinitelem intenzity napětí .....	18
4.2	Hypotéza nestabilního šíření trhliny .....	20
4.3	Namáhání trhliny normálovým módem (mód I) .....	20
5	Rozevření trhliny ( <i>COD</i> a <i>CTOD</i> ) .....	22
5.1	Definice <i>COD</i> a <i>CTOD</i> .....	22
5.2	Vzájemný vztah mezi <i>CTOD</i> , <i>K</i> a <i>G</i> .....	24
6	<i>J</i> -integrál .....	25
6.1	Úvod .....	25
6.2	Definice <i>J</i> -integrálu .....	25
6.3	Vzájemný vztah mezi <i>J</i> , <i>K</i> a <i>CTOD</i> .....	26
6.3.1	<i>J</i> -integrál a součinitel intenzity napětí .....	26
6.3.2	<i>J</i> -integrál a rozevření na čele trhliny .....	27
7	Dvoupřímá lomová mechanika .....	27
7.1	<i>T</i> -napětí .....	27
7.1.1	Úvod, definice .....	27
7.1.2	Faktor biaxility, vztah <i>T</i> -napětí a součinitele intenzity napětí .....	28
7.2	<i>Q</i> parametr .....	29
7.2.1	Referenční pole pomocí HRR řešení .....	29
7.2.2	Referenční pole pomocí vztažení na případ nulové hodnoty <i>T</i> -napětí .....	29
7.2.3	Shrnutí obou hlavních metod určení referenčního pole .....	30
8	Závěr .....	31
9	Použité zdroje .....	32
10	Seznam použitých symbolů a zkratek .....	33



# 1 ÚVOD

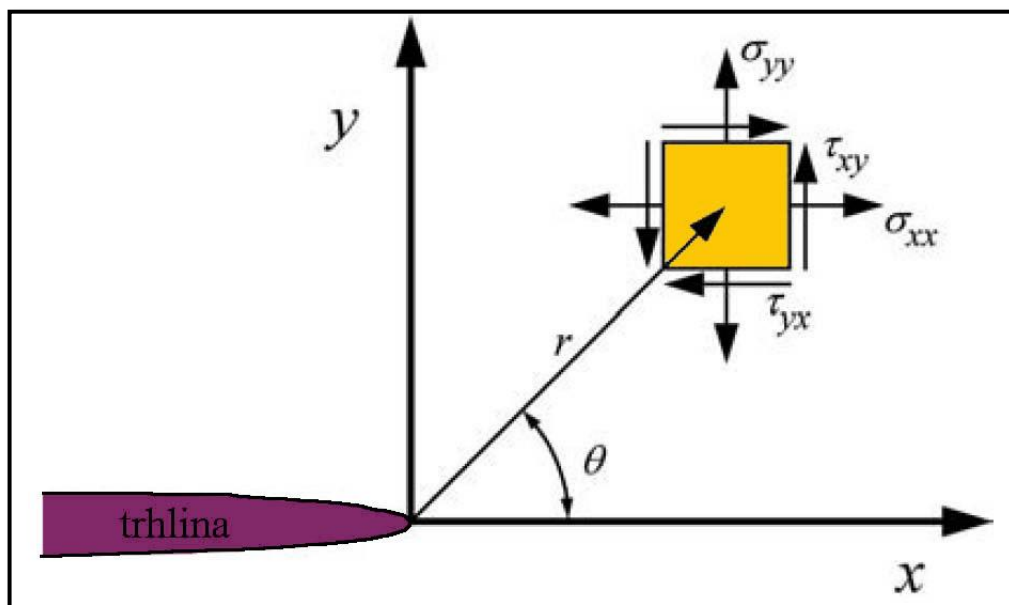
Lomová mechanika jako vědní disciplína se zabývá studiem zákonitostí porušování těles, vzniku a šíření lomu. Na svém počátku se rozvíjela klasická lomová mechanika, která popisuje pole napětí a deformace na čele trhliny pouze jediným parametrem. Předpokládáme-li rozsah plastických deformací v okolí čela trhliny mnohem menší, než je délka trhliny a charakteristický rozměr tělesa, hovoříme o lineární elastické lomové mechanice (LELM). Popisujícím parametrem je nejčastěji součinitel intenzity  $K$ . Jsou-li plastické deformace větší a není již možné zanedbat jejich vliv na popis chování tělesa, jde o elasto-plastickou lomovou mechaniku (EPLM). Děje v oblasti čela trhliny můžeme popsat např. pomocí  $J$ -integrálu.

Při aplikaci lomových podmínek na skutečná tělesa se porovnává vypočítaná hodnota s kritickou hodnotou parametrů  $K_c$ , popř.  $J_c$  naměřených v laboratořích na zkušebních vzorcích za předpokladu nezávislosti těchto hodnot na geometrii a rozměrech tělesa, tj. jsou považovány za materiálové charakteristiky.

Tenzor napětí ve vzorku s trhlinou [1] v rámci elastických deformací je možné vyjádřit pomocí Williamsovy nekonečné mocninné řady

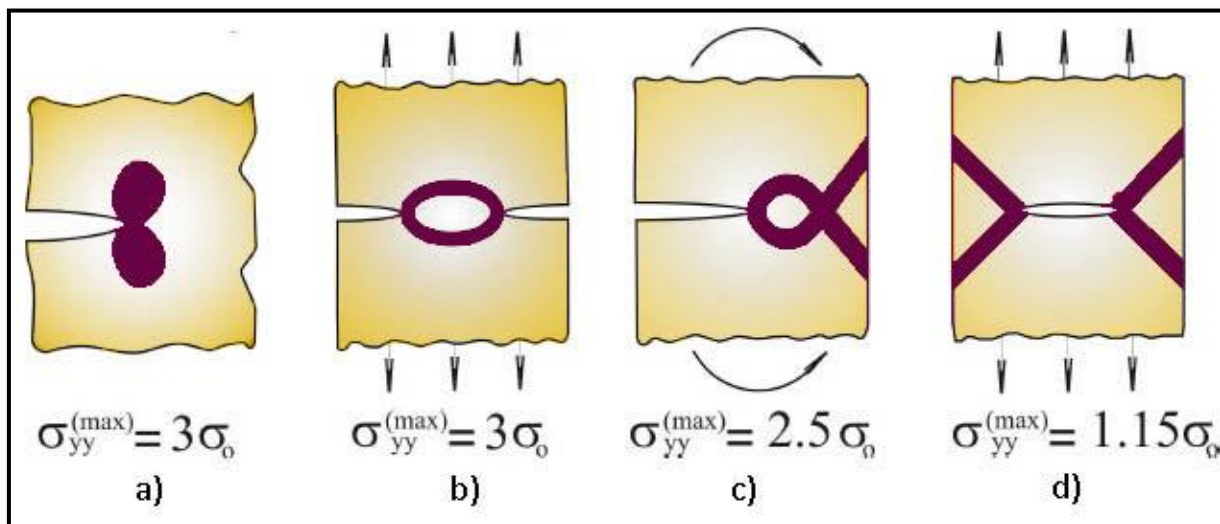
$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{n}{2} \right) r^{\frac{n}{2}-1} f_{ij}(n, \varphi), \quad (1.1)$$

kde kořen trhliny je orientován do počátku polárního souřadného systému  $(r, \varphi)$ , členy  $A_n$  jsou konstanty a  $f_{ij}$  je bezrozměrná funkce úhlu. První člen je singulární a závislý na vzdálenosti  $r$ , druhý člen na vzdálenosti od kořene trhliny nezávisí a je konečný a zbylé členy pro  $r \rightarrow 0$  konvergují k nule, tudíž je můžeme zanedbat. Součinitel intenzity napětí  $K$  se pak rovná prvnímu členu rozvoje.



Obr. 1: Polární souřadný systém s počátkem ve vrcholu [4]

Řada studií ale dokazuje, že různé tvary těles mohou vyvolávat odlišné stupně multiaxiality napětí v okolí kořene trhliny. Např. McClintock provedl studii využívající teorie skluzových čar pro nezpevňující materiál v plastickém stavu, který ukázal na skutečnost, že napětí a tvar plastické oblasti úzce souvisí s geometrií tělesa [2].



Obr. 2: Porovnání stavu plasticity malého rozsahu se třemi různými konfiguracemi plasticity [2]

Na obr. 2a) je plastická oblast malá, pro materiál bez zpevnění je maximální napětí u kořene trhliny rovno  $3\sigma_0$ .

Na obr. 2b) je znázorněný tažený vzorek s oboustrannou trhlinou a podobně jako u obr. 2a) je u kořene vysoký stupeň triaxiality.

Obr. 2c) znázorňuje ohýbanou stěnu s povrchovou trhlinou, maximální napětí u kořene trhliny je rovno  $2,5\sigma_0$ .

Tažená stěna s trhlinou uprostřed, znázorněná na obr. 2d), nedosahuje významnější triaxiality v plastickém stavu.

Poznamenejme ale, že pro zpevňující materiály je vliv tvaru tělesa mnohem méně výrazný.

Vliv multiaxiality napětí na lomové chování je označován jako *constraint effect*. Někdy se překládá jako „stísnění“ deformace, ale častěji se ponechává v jeho anglickém tvaru, a proto v dalším textu nebudeme tento termín překládat.

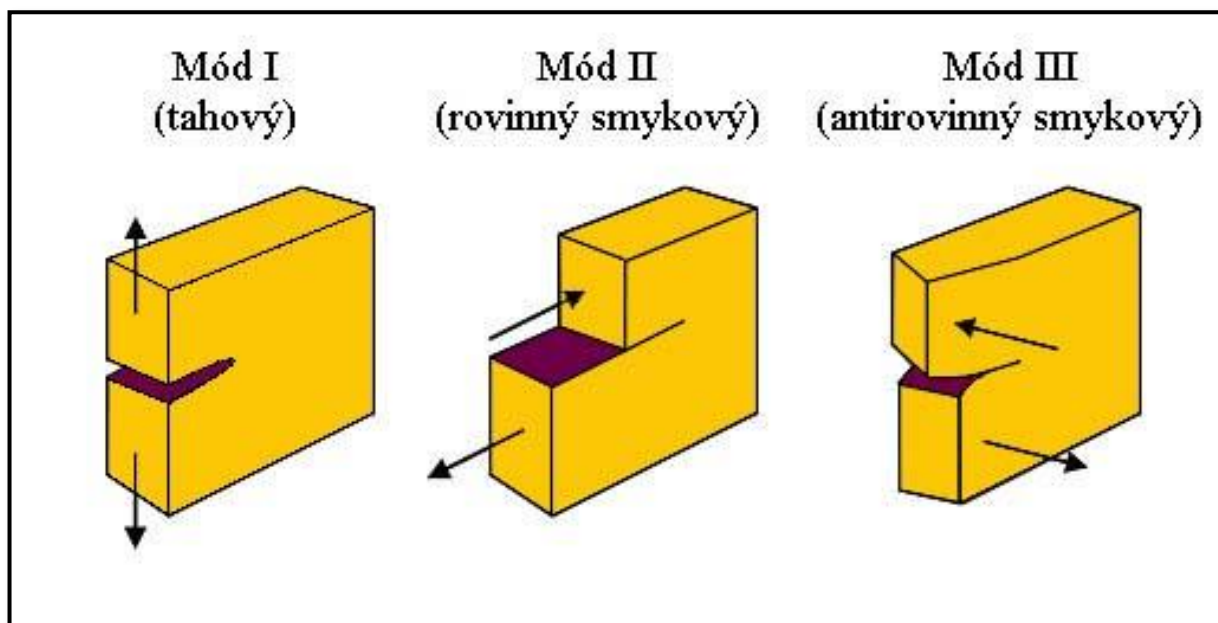
Tato studie a další poznatky vedly k nutnosti nalezení druhého parametru, jehož zavedení by zahrnuje i vliv geometrie tělesa na popis podmínek na čelo trhliny. Proto se začal používat kromě singulárního členu Wiliamsova rozvoje další, konstantní člen, tzv. *T*-napětí pro LELM nebo *Q*-parametr pro EPLM. Na základě těchto dvou parametrů potom platí tvrzení, že chování dvou těles je identické, můžeme-li popsat trhlinu stejnou hodnotou součinitele intenzity napětí *K* (popř. *J*-integrálem) a zároveň stejnou hodnotou popisující constraint, tzn. *T*-napětím (popř. parametrem *Q*). Toto tvrzení je důležité zachovat při používání experimentálně naměřených výsledků na vzorcích k výpočtům reálných technických těles.

## 2 SOUČINITEL INTENZITY NAPĚTÍ

### 2.1 Definice součinitele intenzity napětí

Součinitel intenzity napětí je zřejmě nejrozšířenější a nejpoužívanější veličinou, kterou můžeme účinně charakterizovat stav napjatosti v tělese s trhlinou. V tomto parametru je obsažen popis způsobu vnějšího zatížení, jeho velikost a také základní charakteristika geometrie tělesa a trhliny [3].

Podle orientace působícího zatížení vůči trhlině v tělese rozeznáváme tři základní módy namáhání. Součinitel intenzity napětí  $K_I$  ( $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ) je potom přiřazen podle módu, ve kterém působí.



Obr. 3: Grafické znázornění jednotlivých módů namáhání [8]

Rozevírání trhliny v tělese je řízeno velikostí rozhodující složky tenzoru napětí před čelem trhliny (tj. pro  $\varphi = 0$ , resp.  $y = 0$ ). Těmito složkami jsou  $\sigma_y$  (pro mód I),  $\tau_{xy}$  (pro mód II) a  $\tau_{yz}$  (pro mód III). Pomocí uvedených složek tenzoru napětí jsou pro tři základní způsoby porušování definovány součinitele intenzity napětí vztahy [3].

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \sigma_y(r, \varphi), \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \tau_{xy}(r, \varphi), \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \tau_{yz}(r, \varphi). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Pro nekonečně velké těleso pak dostaneme konečné vyjádření součinitele intenzity napětí

$$\begin{aligned}K_I &= \sigma_y \sqrt{\pi a}, \\K_{II} &= \tau_{xy} \sqrt{\pi a}, \\K_{III} &= \tau_{yz} \sqrt{\pi a},\end{aligned}\tag{2.2}$$

kde  $a$  je délka trhliny,  $r$  je polární souřadnice vzdálenosti od vrcholu trhliny.

### 2.1.1 Princip superpozice

Pro lineárně elastické pole napětí platí, že jednotlivé složky napětí a posunutí je možné sčítat. Podobně uvažujeme při sčítání součinitelů intenzity napětí, kdy lze sjednotit jen napětí působící ve stejném módu namáhání [4]. Tedy platí

$$K_I^{(total)} = K_I^{(A)} + K_I^{(B)} + K_I^{(C)},\tag{2.3}$$

ale neplatí

$$K_{(total)} \neq K_I + K_{II} + K_{III}.\tag{2.4}$$

## 2.2 Tahový mód I

Westergaard odvodil rovnice popisující napěťové pole v blízkém okolí čela trhliny ( $r \ll a$ ).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right], \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right], \\ \sigma_z &= \begin{cases} 0 & \text{pro rovinnou napjatost (RN)} \\ \mu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{pro rovinnou deformaci (RD)} \end{cases} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right), \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0,\end{aligned}\tag{2.5}$$

kde  $\mu$  je Poissonovo číslo [2].

Uvažujeme-li namáhání v rovině trhliny ( $\varphi = 0$ ), pak

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{a} \quad \tau_{xy} = 0. \quad (2.6)$$

Můžeme uvést také rovnice pro posuvy

$$u_x = \frac{K_I}{2G_s} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right], \quad (2.7)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2G_s} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right],$$

kde  $G_s$  je modul pružnosti ve smyku,  $\kappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$  pro RN a  $\kappa = 3 - 4\mu$  pro RD.

### 2.3 Rovinný smykový mód II

Podobně můžeme jednotlivá napětí a posuvy zapsat také pro namáhání módem II ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right], \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right), \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right], \\ \sigma_z &= \begin{cases} 0 & \text{pro RN} \\ \mu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{pro RD} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$u_x = \frac{K_{II}}{2G_s} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right], \quad (2.9)$$

$$u_y = \frac{K_{II}}{2G_s} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[ \kappa - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right].$$

## 2.4 Antirovinný smykový mód III

Analogicky jako u předchozích lze odvodit

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (2.10)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$u_z = \frac{2K_{III}}{G_s} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (2.11)$$

V případě, že je těleso současně zatíženo více módy, je možné využít principu superpozice a pole napětí popsat ve tvaru

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)}. \quad (2.12)$$

## 3 HNACÍ SÍLA TRHLINY

### 3.1 Energetická bilance, hnací síla trhliny

Působí-li na těleso s trhlinou vnější síly, lze potom celkovou energetickou bilanci toho tělesa obecně vyjádřit vztahem

$$E_c = \Pi + W_s, \quad (3.1)$$

kde:  $E_c$  je celková volná energie trhliny,

$\Pi$  je celková potenciální energie,

$W_s$  je disipační energie trhliny (energie potřebná k iniciaci trhliny) [4].

(pozn. energetická bilance je vyjádřena pro jednotkovou tloušťku tělesa  $B$ )

Tato volná energie se v tělese hromadí a narůstá tak dlouho, dokud nedojde k meznímu stavu, při němž trhlina ztrácí svou stabilitu. Podmínku nestability trhliny je možné vyjádřit diferenciální rovnicí

$$\frac{dE_c}{da} = \frac{d}{da}(\Pi + W_s) = 0, \quad (3.2)$$



popř. můžeme upravit na tvar

$$-\frac{d\Pi}{da} = \frac{dW_s}{da}. \quad (3.3)$$

Celková potenciální energie je složena z vnitřní energie napjatosti  $U$  a práce vnějších sil působících na těleso  $A$ , tedy platí vztah

$$\Pi = U - A. \quad (3.4)$$

**Odpor tělesa vůči šíření trhliny** vyjadřuje množství potřebné energie k iniciaci lomuové plochy jednotkové velikosti. V rovnici (3.3) se vyskytuje na pravé straně a je označován písmenem  $R$ .

Levá strana rovnice se nazývá **rychlost uvolňování deformační energie** nebo také **hnací síla trhliny**, značí se  $G$  a po dosazení má tvar

$$G = \frac{d}{da}(A - U) \quad (3.5)$$

Pro úplnost poznamenejme, že zde použitý termín rychlost neodpovídá rychlosti, tak jak ji známe, tzn. derivaci podle času, ale vyjadřuje spíše růst změny potenciální energie v oblasti trhliny.

### 3.2 Vztah mezi součinitelem intenzity napětí a hnací silou trhliny

Představili jsme si dva parametry popisující chování trhlín – hnací sílu trhliny a součinitel intenzity napětí. Prvně jmenovaný parametr popisuje změny potenciální energie související s růstem velikosti trhliny. Druhý zmiňovaný nám dává přehled o napětí a otevření v blízkém okolí kořene trhliny. Hnací síla trhliny se zabývá chováním v tělese jako celku, zatímco  $K$  je spíše lokální parametr. Uvažujeme-li lineárně elastický materiál, existuje mezi  $K$  a  $G$  vzájemný vztah při tahovém módu

$$G_I = \frac{\kappa + 1}{8G_s} K_I^2 = \frac{K_I^2}{E'}, \quad (3.6)$$

kde  $E'$  je efektivní Youngův modul pružnosti v tahu, pro rovinnou napjatost platí  $E' = E$  a pro rovinnou deformaci  $E' = (1 - \mu^2)/E$  [2].

Obdobně pro rovinný a antirovinný smykový mód

$$G_{II} = \frac{\kappa + 1}{8G_s} K_{II}^2 = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad \text{a} \quad G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2G_s} = \frac{1 + \mu}{E} K_{III}^2. \quad (3.7)$$

Hnací síla trhliny má skalární charakter a je tedy možné sjednotit všechny tři módy dohromady, pak

$$G_{(total)} = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{1 + \mu}{E} K_{III}^2. \quad (3.8)$$

## 4 HUSTOTA DEFORMAČNÍ ENERGIE

Doposud jsme uvažovali šíření trhliny ve stejném směru, jako je její orientace. V technické praxi jsou ale reálná tělesa vystavena kombinovanému namáhání. Na trhlínu v takovém tělese pak působí všechny tři módy namáhání zároveň, jde o smíšený mód porušování. V tomto případě však obecný předpoklad směru šíření není splněn a aplikace předchozích kritérií mohou být chybné [3].

Jedním z nejvýznamnějších průkopníků v oblasti této problematiky byl Shih, který vypracoval koncepci hustoty deformační energie. Ta umožňuje definovat, za jakých podmínek dochází k nestabilnímu šíření lomu, ale také objektivně určuje směr šíření trhliny.

### 4.1 Definice koncepce a vztah se součinitelem intenzity napětí

Při úvaze lineárně elastického chování materiálu vycházíme z obecného vztahu pro objemovou hustotu deformační energie ve tvaru

$$\frac{dU}{dV} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (4.1)$$

Po dosazení jednotlivých složek tenzoru deformace  $\varepsilon_{ij}$  dle obecného Hookova zákona a následné úpravě dostaneme

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G_s} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2). \quad (4.2)$$

Jelikož uvažujeme obecný mód porušování, je potřeba sečíst jednotlivá napětí v módech I, II a III. Dosazením rovnic (2.5), (2.8) a (2.10) do vztahu (2.12) dostaneme složky výsledného tenzoru napětí v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right], \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right), \\ \sigma_z &= \begin{cases} 0 & \text{pro RN} \\ \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - K_{II} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] & \text{pro RD'} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right],$$

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Dosadíme-li tyto složky do vztahu (4.2), dostaneme po úpravě vyjádření **pro hustotu deformační energie**

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{r} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2) = \frac{S}{r} \quad (4.4)$$

Koeficienty  $a_{ij}$  jsou definovány:

- pro stav RD

$$a_{11} = \frac{1}{16\pi G_s} [(3 - 4\mu - \cos\varphi)(1 + \cos\varphi)],$$

$$a_{12} = \frac{1}{8\pi G_s} \sin\varphi [\cos\varphi - (1 - 2\mu)],$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\pi G_s} [4(1 - \mu)(1 - \cos\varphi) + (1 + \cos\varphi)(3\cos\varphi - 1)],$$

$$a_{33} = \frac{1}{4\pi G_s},$$

- pro stav RN

(4.5)

$$a_{11} = \frac{1}{16\pi G_s} \left[ \left( \frac{3 - \mu}{1 + \mu} - \cos\varphi \right) (1 + \cos\varphi) \right],$$

$$a_{12} = \frac{1}{8\pi G_s} \sin\varphi \left[ \cos\varphi - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right],$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\pi G_s} \left[ \frac{4}{1 + \mu} (1 - \cos\varphi) + (1 + \cos\varphi)(3\cos\varphi - 1) \right],$$

$$a_{33} = \frac{1}{4\pi G_s}.$$

## 4.2 Hypotéza nestabilního šíření trhliny

Součinitel hustoty deformační energie je popsán rovnicí

$$S = r \frac{dU}{dV}. \quad (4.6)$$

Dosadíme-li za  $dU/dV$  ze vztahu (4.4), získáme vzájemný přepočtový vztah parametrů  $S$  a  $K_{I,II,III}$  ve tvaru

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2. \quad (4.7)$$

Teorie nestabilního šíření trhliny je založena na dvou základních úvahách, které formuloval Sih:

- a) Směr šíření trhliny je souhlasný se směrem minimální hustoty deformační energie. Tento směr udává úhel  $\varphi_0$ , který získáme po splnění podmínek

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} > 0. \quad (4.8)$$

- b) Mezní hodnotou mezi stabilním a nestabilním šířením trhliny je kritická hodnota součinitele hustoty deformační energie  $S_c$ , vyjadřující odpor materiálu vůči růstu trhliny. K tomu dojde, nastane-li

$$S = S_c \quad \text{pro} \quad \varphi = \varphi_0. \quad (4.9)$$

## 4.3 Namáhání trhliny normálovým módem (mód I)

Pro lepší názornost možnosti použití aplikujeme Shihovu koncepci na jednoduchý příklad. Budeme uvažovat stav rovinné deformace tělesa nekonečných rozměrů s centrální trhlínou o délce  $2a$ , na které působí v ose  $y$  tahové napětí  $\sigma$ . Tomu odpovídají součinitele intenzity napětí

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma\sqrt{\pi a}, \\ K_{II} &= 0, \\ K_{III} &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Po dosazení rovnic (4.5) a (4.10) do vztahu (4.7) dostaneme tvar

$$S = \frac{\sigma^2 a}{16G_s} (3 - 4\mu - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi). \quad (4.11)$$

Podmínka pro hledání extrémů nám říká, že první derivace podle úhlu směru šíření se rovná nule, tedy

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{\sigma^2 a}{8G_s} (2\mu - 1 + \cos \varphi) = 0. \quad (4.12)$$

Tato rovnice má dvě řešení:  $\varphi_1 = 0$  a  $\varphi_2 = \arccos(1 - 2\mu)$ . Druhou částí podmínky je ověření, zda nalezené extrémy jsou minima, tj.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} = \frac{\sigma^2 a}{8G_s} (\cos 2\varphi + (2\mu - 1)\cos \varphi) > 0. \quad (4.13)$$

Můžeme se snadno dosazením  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  přesvědčit, že nerovnici odpovídá pouze hodnota  $\varphi_1$ , kdežto druhé řešení pro  $\varphi_2$  je záporné. Rovina  $\varphi = \varphi_1$  tedy odpovídá směru s nejnižší hustotou deformační energie a trhlina se bude šířit právě tímto směrem. Hodnota  $S_{min}$  je

$$S_{min} = \frac{\sigma^2 a}{4G_s} (1 - 2\mu). \quad (4.14)$$

Ke kritické hodnotě hustoty deformační energie  $S_c$ , tedy k nestabilnímu růstu trhliny pak dojde v případě působení kritického napětí  $\sigma_c$ , po dosazení a vyjádření

$$S_c = \frac{\sigma_c^2 a}{4G_s} (1 - 2\mu) = \frac{K_{Ic}^2}{4\pi G_s} (1 - 2\mu). \quad (4.15)$$

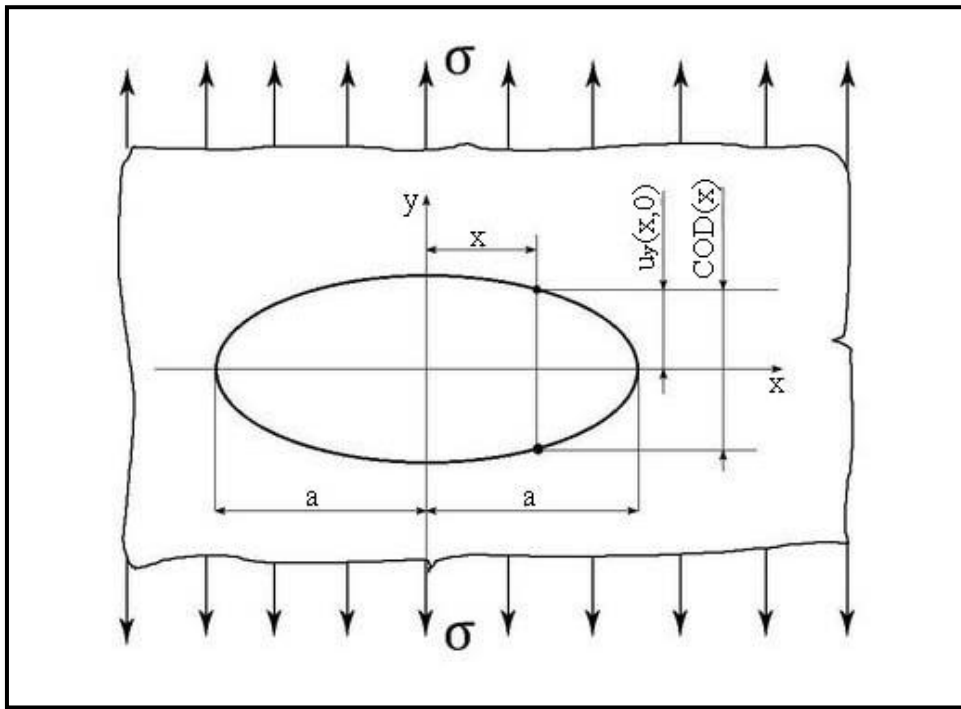
Stejný postup aplikujeme, jedná-li se o namáhání jiným módem nebo několika módy zároveň.

## 5 ROZEVŘENÍ TRHLINY (*COD* A *CTOD*)

### 5.1 Definice *COD* a *CTOD*

Rozevření trhliny (*COD* = *crack opening displacement*) a rozevření na čele trhliny (*CTOD* = *crack tip opening displacement*) jsou koncepce elastoplastické lomové mechaniky (EPLM).

Bližší představu, co parametr *COD* popisuje, je možné získat z následujícího obrázku.



Obr. 4: Otevření trhliny *COD* při namáhání tahovým módem [3]

*COD* v případě tahového módu I vyjadřuje velikost rozevření trhliny ve vzdálenosti  $x$  od středu trhliny a platí pro ni matematické vyjádření [3]

$$COD(x) = 2u_y(x, 0). \quad (5.1)$$

Vyjádřením posuvů z Westergaardovy funkce napětí a dosazením  $y=0$  (body v rovině trhliny) dostaneme

$$u_y(x, 0) = \frac{2\sigma}{E'} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (5.2)$$

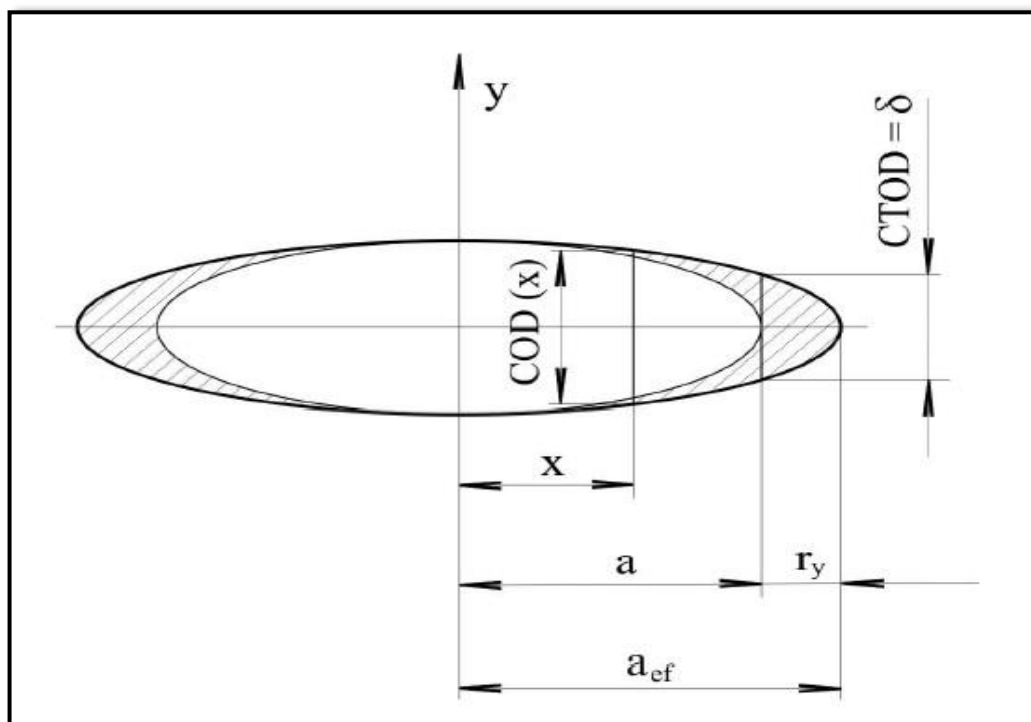
kde  $E'$  je efektivní Youngův modul pružnosti, definovaný v kapitole 3.2.

Dosazením do vztahu (5.1) dostaneme

$$COD(x) = \frac{4\sigma}{E'} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (5.3)$$

Uvedené vztahy platí pro **elastický stav napjatosti**. Pokud by však docházelo k namáhání v oblasti čistě elastických deformací, pak se rozevření trhliny bude blížit nekonečnu, ale délka trhliny zůstane stejná, tzn. rozevření čela trhliny *CTOD* bude nulové. Dosazením souřadnice čela trhliny  $x = a$  se můžeme přesvědčit, že toto tvrzení potvrzuje i rovnice (5.3).

Avšak ve skutečnosti dochází před čelem trhliny k **plastické deformaci**. Jak již bylo řečeno, plastická deformace na čele trhliny zapříčiňuje, že se trhlina chová, jako by byla mírně delší, než ve skutečnosti je. Tento fakt je příčinou zavedení pojmu efektivní délka trhliny (označovaná  $a_{ef}$ ), a platí vztah  $a_f = a + r_y$  [3].



Obr. 5: Znázornění efektivní délky trhliny při výskytu plastické deformace na čele trhliny [2]

Nyní můžeme přepsat vztah (5.3) do tvaru

$$COD(x) = \frac{4\sigma}{E'} \sqrt{(a + r_y)^2 - x^2} \quad (5.4)$$

a vyjádření pro rozevření na čele trhliny *CTOD* po dosazení  $x=a$  jako

$$CTOD = \delta = \frac{4\sigma}{E'} \sqrt{2ar_y + r_y^2}. \quad (5.5)$$

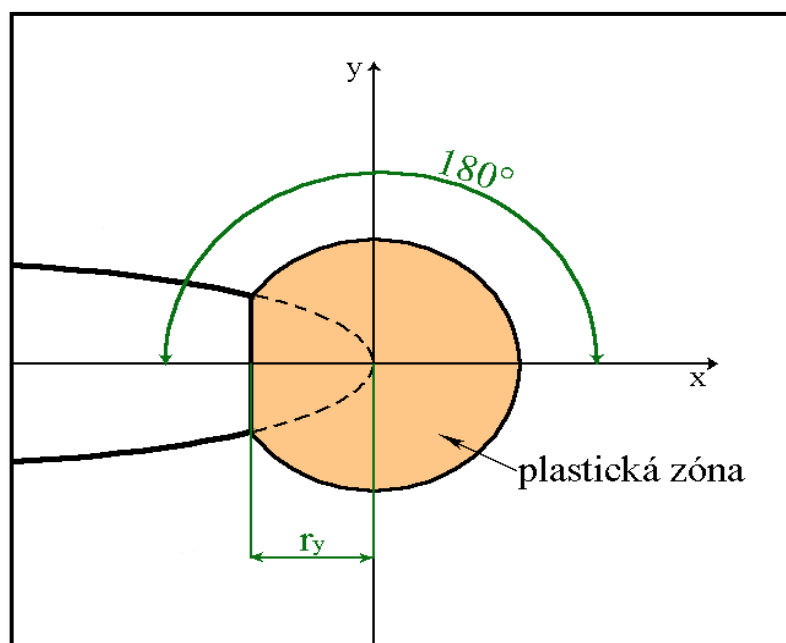
## 5.2 Vzájemný vztah mezi *CTOD*, *K* a *G*

A. A. Wells [5] ve své práci představil provázanost mezi rozevřením na čele trhliny *CTOD* a součinitelem intenzity napětí *K* pro plastické deformace malého rozsahu. Dosazením hodnot  $\varphi = 180^\circ$  a  $r = r_y$  do obecné rovnice posuvu (2.7) dostaneme vyjádření posuvu  $u_y$  v místě „fyzické“ trhliny (viz Obr. 6) ve tvaru

$$u_y = \frac{\kappa + 1}{2G_s} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} = \frac{4}{E'} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}}. \quad (5.6)$$

Dosazením tzv. Irwinovy korekce na velikost plastické zóny získáme vztah

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{R_e} \right)^2. \quad (5.7)$$



Obr. 6: Rozevření *CTOD* na efektivní délce trhliny v místě Irwinovy korekce na velikost plastické zóny

Výsledné vyjádření vztahu pro *CTOD* je tedy

$$\delta = 2u_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{E' R_e}. \quad (5.8)$$

Aplikací rovnice (3.6) je možné zapsat *CTOD* také v závislosti na hnací síle trhliny *G*

$$\delta = \frac{4}{\pi} \frac{G}{R_e}. \quad (5.9)$$

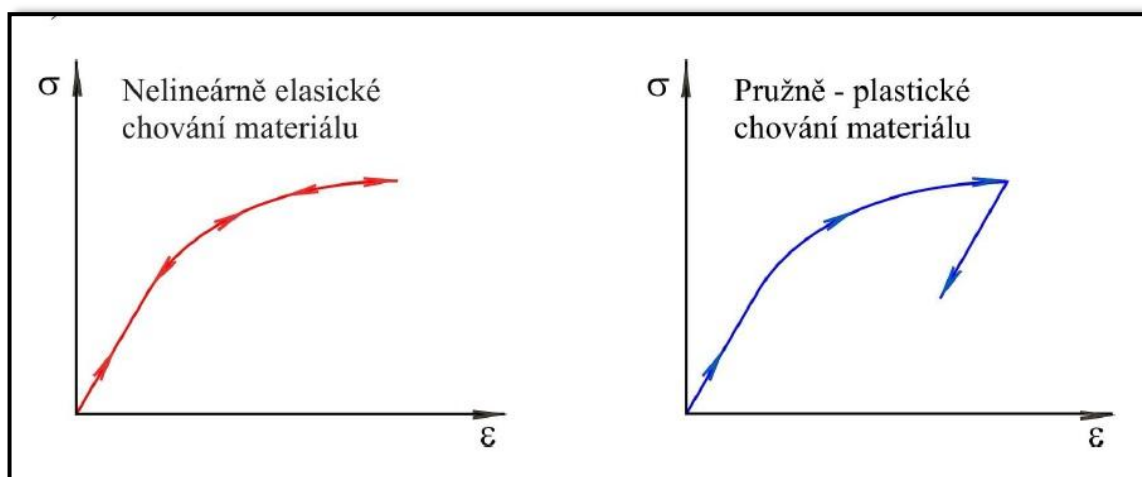


## 6 J-INTEGRÁL

### 6.1 Úvod

Křivkový  $J$ -integrál (označovaný také jako Riceův integrál) dosáhl poměrně velkého významu jako parametr charakterizující lom v nelineárních materiálech. Rice provedl idealizaci elasto – plastické deformace jako nelineárně elastické, čímž vytvořil základy pro užití lomové mechaniky za hranicí platnosti LELM.

Jak je patrné z Obr. 7, chování obou materiálů je při zatěžování identické. Rozdíl však nastává po odlehčení. Zatímco u elasto-plastického materiálu probíhá odlehčování po přímce (sklon je závislý na Youngově modulu  $E$ ), odlehčovací trajektorie nelineárně elastického materiálu je stejná jako zatěžovací. Vztah mezi napětím a přetvořením elastického materiálu je jednoznačně daný, ale jednomu přetvoření elasto-plastického materiálu může odpovídat i více hodnot napětí, je-li materiál cyklicky zatěžován a odlehčován. Proto je mnohem jednodušší analyzovat elastický materiál než materiál prokazující nevratné plastické změny.



Obr. 7: Znáznornění průběhu deformací při jednoosém namáhání nelineárně elastického a elasto-plastického materiálu [2]

Zobecníme-li tento problém na trojrozměrný, nemusí zatěžování nelineárně elastického a elasto-plastického materiálu probíhat totožně, nicméně existuje mnoho příkladů, pro něž je toto dobrým předpokladem. Tedy analýza předpokládající nelineární elastické chování může platit i pro elasto-plastický materiál, který však není odlehčován [4].

### 6.2 Definice $J$ -integrálu

Základní úvahou pro posouzení stability trhliny je celková energetická bilance porušovaného tělesa. Parametrem charakterizujícím stabilitu trhliny v materiálech, v nichž dochází v okolí čela trhliny k lokální plastické deformaci s plastickou zónou malého rozsahu, je hnací síla trhliny  $G$ .

$J$ -integrál je zobecněním hnací síly trhliny a je možné jej použít, i když v okolí čela trhliny zatěžovaného tělesa dochází k plastickým deformacím většího rozsahu [4]. Uvážením libovolné křivky ( $\Gamma$ ) okolo trhliny, orientované proti směru hodinových ručiček, je hodnota tohoto křivkového integrálu definovaná vztahem

$$J = \int_{\Gamma} \left( \frac{dU}{dV} dy - \frac{T_i \partial u_i}{\partial x} ds \right), \quad (6.1)$$

kde:  $\frac{dU}{dV} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  je objemová hustota deformační energie,

$T_i = \sum_j \sigma_{ij} n_j$  je  $i$ -tá složka vektoru povrchové tahové síly kolmé na křivku  $\Gamma$ ,

$u_i$  je  $i$ -tá složka vektoru posuvu.

Hodnota  $J$ -integrálu **nezávisí na integrační cestě** a v případě libovolné, **uzavřené křivky  $\Gamma$  platí  $J = 0$**

Rice [6] ve své práci dokázal, že hodnota  $J$ -integrálu je rovna hnací síle trhliny v nelineárně elastickém tělese s trhlinou, tedy v rovnici (3.5) je  $G$  nahrazeno za  $J$  a získáváme tvar

$$J = \frac{d}{da} (A - U), \quad (6.2)$$

kde  $\Pi = U - A$ ,  $U$  je vnitřní energii napjatosti,  $A$  je práce vnějších sil působících na těleso a  $\Pi$  je celková potenciální energie v tělese.

### 6.3 Vzájemný vztah mezi $J$ , $K$ a $CTOD$

#### 6.3.1 $J$ -integrál a součinitel intenzity napětí

Protože se  $J$ -integrál rovná hnací síle v nelineárně elastickém tělese, můžeme také vyjádřit vzájemnou propojenost se součinitelem intenzity napětí  $K$  stejně, jako tomu bylo právě u parametru  $G$

$$J_I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad (6.3)$$

uvedený vztah však platí pouze pro plasticitu malého rozsahu [2].

Můžeme také sjednotit všechny tři módy namáhání dohromady, obdobně jako v rovnici (3.8), a dostat tak celkovou hodnotu  $J$ -integrálu

$$J_{(total)} = J_I + J_{II} + J_{III} = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{1 + \mu}{E} K_{III}^2. \quad (6.4)$$

### 6.3.2 $J$ -integrál a rozevření na čele trhliny

Jelikož existuje vzájemný vztah mezi  $CTOD$  a  $G$  a pro lineárně elastické vlastnosti materiálu platí  $J = G$ , v rámci plastické zóny malého rozsahu existuje vztah také mezi  $J$  a  $CTOD$ . Ten má tvar

$$J = mR_e\delta, \quad (6.5)$$

kde  $m$  je bezrozměrná konstanta, závislá na stavu napjatosti a vlastnostech materiálu. Pro rovinnou napjatost nabývá hodnoty  $m = 1$  a pro rovinnou deformaci pak  $1 < m < 3$  [4].

Pro případ překročení hranic platnosti LELM uvedl Shih [7] platný vztah

$$J = \frac{1}{d_n} \sigma_0 \delta, \quad (6.6)$$

kde  $d_n$  je bezrozměrná konstanta závislá na poměru  $R_e/E$  a na exponentu zpevnění  $n$  [2].

## 7 DVOUPARAMETROVÁ LOMOVÁ MECHANIKA

### 7.1 $T$ -napětí

#### 7.1.1 Úvod, definice

Vliv constraintu v rámci LELM bývá obvykle charakterizován pomocí druhého členu Williamsova rozvoje.

Pro namáhání módem I je možné popsat jednotlivé složky napětí  $\sigma_{ij}$  a posunutí  $u, v$  ve tvaru Williamsovy nekonečné mocninné řady, kde  $(r, \varphi)$  jsou polární souřadnice s počátkem v kořenu trhliny (viz Obr. 1) a trhlina je orientovaná podél osy  $x$  [1].

Napěťové složky jsou pak ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{n}{2} \right) (r)^{\frac{n}{2}-1} \begin{Bmatrix} \left\{ 2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \varphi - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \varphi \\ \left\{ 2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \varphi + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \varphi \\ - \left\{ (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \varphi + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \varphi \end{Bmatrix}, \quad (7.1)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2G_s} (r)^{\frac{n}{2}} \begin{Bmatrix} \kappa \cos \left( \frac{n}{2} \right) \varphi - \frac{n}{2} \cos \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \varphi + \left\{ \frac{n}{2} + (-1)^n \right\} \cos \frac{n\varphi}{2} \\ \kappa \sin \left( \frac{n}{2} \right) \varphi + \frac{n}{2} \sin \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \varphi - \left\{ \frac{n}{2} + (-1)^n \right\} \sin \frac{n\varphi}{2} \end{Bmatrix}. \quad (7.2)$$

Popis jednotlivých členů je již uveden v kapitole 1.

Po vyjádření potom dostaneme výrazy pro popis pole napětí

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \frac{A_1}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{5}{2} \varphi \\ \frac{5}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{5}{2} \varphi \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{5}{2} \varphi \end{Bmatrix} + A_2 \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

a posunutí ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{A_1}{2G_s} \sqrt{r} \begin{Bmatrix} \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3}{2} \varphi \\ \left( \kappa + \frac{1}{2} \right) \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3}{2} \varphi \end{Bmatrix} + \frac{A_2}{2G_s} r \begin{Bmatrix} (\kappa + 1) \cos \varphi \\ (\kappa - 3) \sin \varphi \end{Bmatrix}, \quad (7.4)$$

kde člen  $A_1 = K_I / \sqrt{2\pi}$  a člen  $A_2 = T/4$ .

Napětíové pole je tedy možné po dosazení zjednodušeně popisovat jako

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\varphi) + \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

V případě rovinné deformace vzniká navíc napětí v ose z

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\varphi) + \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu T \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Jak je možné vidět v rovnicích (7.3) a (7.5), elastické  $T$ -napětí je vázáno pouze k druhému členu a vyskytuje se ve směru osy x. V případě rovinné deformace působí navíc ve směru osy z a má velikost  $\mu T$  [4].

### 7.1.2 Faktor biaxility, vztah $T$ -napětí a součinitele intenzity napětí

V tělese s trhlinou namáhaným módem I je hodnota  $T$ -napětí, stejně jako součinitele intenzity napětí, závislá na aplikovaném namáhání. Faktor biaxility (dvouososti)  $\beta$  pak definuje vzájemný vztah mezi oběma parametry a zároveň je z praktických důvodů vhodné jej používat pro charakterizaci constraintu. Zapisujeme ho ve tvaru

$$\beta = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I}. \quad (7.7)$$

## 7.2 $Q$ parametr

Stejně jako v případě LELM, jednoparametrový popis není kvůli závislosti na geometrii tělesa, a proto se zavádí parametr  $Q$  charakterizující constraint v oblasti EPLM.

Hodnota parametru  $Q$  je definovaná jako podíl diferenčního pole  $(\sigma_{ij})_{dif}$  a referenčního napětí  $\sigma_o$ , které se většinou bere rovno mezi kluzu  $Re$ . Diferenčním polem rozumíme rozdíl napjatosti v okolí kořene trhliny reálného tělesa  $\sigma_{ij}$  a určitým referenčním polem napjatosti  $(\sigma_{ij})_{ref}$  [1]. Matematický zápis vypadá následovně

$$Q = \frac{\sigma_{ij} - (\sigma_{ij})_{ref}}{\sigma_o} = \frac{(\sigma_{ij})_{dif}}{\sigma_o}. \quad (7.8)$$

$Q$  parametr můžeme definovat několika způsoby, a to v závislosti na způsobu volby referenčního pole.

### 7.2.1 Referenční pole pomocí HRR řešení

Uvažujeme-li teorii malých deformací, okolí kořene trhliny uvnitř plastické zóny může být popsáno mocninnou řadou, kde HRR řešení je hlavním členem. Členy vyšších řádů jsou pak seskupeny dohromady do diferenčního pole

$$(\sigma_{ij})_{HRR} = \sigma_{ij} + (\sigma_{ij})_{dif}. \quad (7.9)$$

### 7.2.2 Referenční pole pomocí vztažení na případ nulové hodnoty $T$ -napětí

Diferenční pole však může být také definované jako odchylka od referenčního řešení s  $T = 0$

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_{T=0} + (\sigma_{ij})_{dif}, \quad (7.10)$$

kde referenční pole  $(\sigma_{ij})_{T=0}$  se vypočítá pomocí modelu povrchové vrstvy (*boundary layer model* – BLM) pro nulovou hodnotu elastického constraintu, tj.  $T=0$ .

O'Dowd a Shih zjistili, že diferenční pole definované v (7.9) a (7.10) lze považovat za konstantní pro  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$  [4]. Navíc poznamenali, že v uvedeném intervalu platí

$$(\sigma_{yy})_{dif} \approx (\sigma_{xx})_{dif} \gg (\sigma_{xy})_{dif}. \quad (7.11)$$

Na základě uvedených skutečností prohlásili, že diferenční pole odpovídá přibližně rovnoměrnému hydrostatickému napětí na čele trhliny a tuto bezrozměrnou amplitudu označili písmenem  $Q$ , pak

$$\sigma_{ij} \approx (\sigma_{ij})_{T=0} + Q\sigma_o\delta_{ij}, \quad (7.12)$$

kde  $\sigma_o$  je referenční napětí a  $\delta_{ij}$  Kroneckerovo delta.

### 7.2.3 Shrnutí obou hlavních metod určení referenčního pole

Pro stanovení hodnoty parametru  $Q$  můžeme využít obou definic určení referenčního pole. Je ale nezbytné držet se po celou dobu výpočtu pouze jedné definice, protože hodnoty získané pomocí obou metod mezi sebou nelze vzájemně porovnávat.

Pokud určujeme referenční pole pomocí HRR řešení, obrovskou výhodou je možnost využití tabelovaných hodnot, čímž se vyhneme nutnosti určovat referenční pole vlastním výpočtem.

Rozhodneme-li se využít určení  $(\sigma_{ij})_{ref}$  pomocí vztažení pro případ  $T = 0$ , výpočet musíme provádět. Výhodou však je dosažení přesnějších výsledků pro námi použité konkrétní těleso, jelikož jsme nuceni modelovat vlastnosti materiálu pomocí experimentálně naměřených závislostí napětí a deformace.

## 8 ZÁVĚR

V práci byly popsány jednotlivé parametry, které se používají pro popis pole napětí v okolí kořene trhliny. Prvotním a nezbytným krokem při hodnocení trhliny je určení, zda na čele trhliny nastanou plastické deformace malého rozsahu nebo bude plastická deformace větší a tím pádem nezanedbatelná.

Základním a nejpoužívanějším parametrem v rámci LELM je bezesporu součinitel intenzity napětí  $K$ . Byl zaveden pro trhlinu v nekonečně velkém tělese a jeho použití je nejvhodnější pro takové případy, které se tomuto ideálnímu modelu blíží. Zahrnuje vliv způsobu, jakým je těleso zatěžováno, velikost zatížení a uvažuje také základní charakteristiku geometrie zatěžovaného tělesa. V práci je uvedena u každého dalšího parametru souvislost s tímto součinitelem  $K$ , což umožní získat lepší představu o významu těchto dalších parametrů.

K popisu trhliny z energetického hlediska se používá hnací síla trhliny  $G$ . Tento parametr umožňuje formulovat energiovou bilanci pomocí energie vnějších zatěžujících sil působících na těleso a vnitřní energie napjatosti. Porovnáním s materiálovými charakteristikami  $R$ , představujícími odpor proti šíření trhliny, umožní stanovit, kdy dojde ke ztrátě stability trhliny.

Součinitel hustoty deformační energie  $S$  se nezabývá pouze mezním stavem, kdy dochází ke ztrátě stability trhliny, ale zejména umožňuje predikci směru šíření trhliny (doposud použitá kritéria stability byla založena na předpokladu znalosti směru šíření trhliny, a to ve směru osy  $x$ , určené orientací trhliny).

Parametr COD popisuje rozevření trhliny ve vzdálenosti  $x$  od středu trhliny a parametr CTOD je jeho limitou na špici trhliny.

Dojde-li v tělese ke vzniku větších plastických deformací, není již možné použít kritéria pro posouzení stability trhliny pomocí parametru  $G$ , jelikož nemůžeme zanedbávat vliv této plastické zóny na chování trhliny.  $J$ -integrál, který je zobecněním hnací síly trhliny, tento problém částečně řeší za předpokladu nelineárně elastického chování materiálu.

Pro tělesa s vysokou hodnotou constraintu je dostatečně přesný a značně jednodušší výpočet pomocí jednoparametrické koncepce, avšak vyskytuje-li se v tělese nízký constraint, aplikací druhého parametru určíme jeho vliv na šíření trhliny. Díky tomu je možné přesněji definovat kritické hodnoty parametrů a zpřesnit tak odhad životnosti technických konstrukcí.

## 9 POUŽITÉ ZDROJE

- [1] KNĚSL Zdeněk, BEDNÁŘ Karel. *Dvouparametrová lomová mechanika: výpočet parametrů a jejich hodnoty*. Brno : Ústav fyziky materiálů AV ČR, 1997.
- [2] VLK, Miloš a FLORIÁN, Zdeněk. *Mezní stavy a spolehlivost*. Brno : Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007.
- [3] KUNZ, Jiří. *Základy lomové mechaniky*. 2. přeprac. vyd. Praha : ČVUT, 1994. ISBN 80-01-01215-8.
- [4] ANDERSON, T.L. *Fracture mechanics: Fundamentals and applications*. 3rd ed. Boca Raton : Taylor & Francis Group, 2005. ISBN 0-8493-1656-1.
- [5] WELLS, A.A. Unstable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture. *Proceedings of the Crack Propagation Symposium*. Vol. 1, Cranfield, UK, 1961.
- [6] RICE, J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 35, 1968.
- [7] SHIH, C.F. Relationship between the J-Integral and the Crack Opening Displacement for Stationary and Extending Cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 29, 1981.
- [8] University of Cambridge. [Online] [Citace: 13. 5 2013.]  
[http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/brittle\\_fracture/same.php](http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/brittle_fracture/same.php).



## 10 SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

LELM	Lineárně elastická lomová mechanika
EPLM	Elasto-plastická lomová mechanika
RN	Rovinná napjatost
RD	Rovinná deformace

symbol	jednotka	význam
$a$	[m]	Délka trhliny
$a_{ef}$	[m]	Efektivní délka trhliny
$d_n$	[-]	Konstanta závislá na poměru $R_e/E$
$f_{ij}$	[-]	Funkce úhlu $\varphi$ ve Williamsově rozvoji
$r$	[m]	Vzdálenost od počátku polární soustavy souřadnic
$r_y$	[m]	Oblast plastické deformace
$u_{x,y,z}$	[m]	Posuv (ve směru x, y, z)

$A$	[J]	Práce vnějších sil působících na těleso
$A_n$	[-]	N-tý člen Williamsovy nekonečné řady
$COD$	[m]	Rozevření trhliny
$CTOD=\delta$	[m]	Rozevření na čele trhliny
$dU/dV$	[J.m <sup>-3</sup> ]	Objemová hustota deformační energie
$E$	[Pa]	Youngův modul pružnosti v tahu
$E'$	[Pa]	Efektivní Youngův modul pružnosti v tahu
$E_c$	[J]	Celková volná energie trhliny
$G_{I,II,III}$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Hnací síla trhliny (mód I, II, III)
$G_s$	[Pa]	Modul pružnosti ve smyku
$J_c$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Kritická hodnota J-integrálu
$J_{I,II,III}$	[N.m <sup>-1</sup> ]	J-integrál (mód I, II, III)
$K_c$	[Pa.m <sup>1/2</sup> ]	Kritická hodnota součinitele intenzity napětí
$K_{I,II,III}$	[Pa.m <sup>1/2</sup> ]	Součinitel intenzity napětí (mód I, II, III)
$Q$	[-]	Q-parametr

$R$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Odpor tělesa vůči šíření trhliny
$R_e$	[Pa]	Mez pružnosti
$S$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Součinitel hustoty deformační energie
$S_c$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Kritická hodnota součinitele hustoty deformační energie
$S_{min}$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Nejnižší hustota deformační energie
$T$	[Pa]	$T$ -napětí
$T_i$	[N]	I-tá složka povrchové tahové síly kolmé na křivku $\Gamma$
$U$	[J]	Vnitřní energie napjatosti
$W_s$	[J]	Disipační energie trhliny

$\beta$	[-]	Faktor biaxility
$\Gamma$	[-]	Libovolná integrační křivka
$\delta_{ij}$	[-]	Kroneckerovo delta
$\varepsilon_{ij}$	[-]	Obecný tenzor deformace
$\mu$	[-]	Poissonova konstanta
$\Pi$	[J]	Celková potenciální energie
$\sigma_{ij}$	[Pa]	Obecný tenzor napětí
$(\sigma_{ij})_{dif}$	[Pa]	Diferenční napět'ové pole
$(\sigma_{ij})_{HRR}$	[Pa]	Referenční napět'ové pole popsané pomocí HRR řešení
$(\sigma_{ij})_{ref}$	[Pa]	Referenční napět'ové pole
$(\sigma_{ij})_{T=0}$	[Pa]	Referenční napět'ové pole pro případ nulového $T$ -napětí
$\sigma_o$	[Pa]	Referenční napětí
$\sigma_{y,x,z}$	[Pa]	Normálové napětí (ve směru x, y, z)
$\tau_{xy,yz,xz}$	[Pa]	Smykové napětí (ve směru xy, yz, xz)
$\varphi$	[rad]	Úhel otočení v polární soustavě souřadnic